

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ
ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В этой статье эллиптические интегралы представлены в виде суммы арктангенсов.

Оценка остаточного члена получена для $Re(\kappa^2 z^2) < 1$.

В дальнейшем применяется сокращенная запись

$$\kappa^2 z^2 \equiv v; (a)_\kappa = a(a+1)\dots(a+\kappa-1), (a)_0 = 1. \quad (1)$$

1. Относительно четных подходящих дробей следующей степенной функции [1]

$$\begin{aligned} (1-v)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} (-v)^m}{\sum_{m=0}^n C_n^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} (-v)^m} + r_{2n}(v) = \\ &= \frac{p_{2n}(v)}{q_{2n}(v)} + r_{2n}(v), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

докажем теорему.

Теорема. Четная подходящая дробь (2) представляется следующей суммой элементарных дробей:

$$\frac{p_{2n}(v)}{q_{2n}(v)} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 - v \sin^2 \frac{2m\pi - \pi}{4n}}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Доказательство. Известно [2], что знаменатели подходящих дробей (2) имеют связь с полиномами Чебышева первого рода, а именно:

$$q_{2n}(v) = T_n(1-2v) = \cos [\arccos(1-2v)]. \quad (4)$$

Согласно равенству (4) нетрудно вычислить, что

$$q_{2n}(v) = \prod_{m=1}^n \left(1 - v \sin^2 \frac{2m\pi - \pi}{4n} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для доказательства тождества (3) пусть

$$\beta_m = -\sin^2 \frac{2m\pi - \pi}{4n},$$

тогда предположим, что

$$\frac{1:n}{1+v\beta_1} + \dots + \frac{1:n}{1+v\beta_n} = \frac{p_{2n}(v)}{q_{2n}(v)}. \quad (6)$$

Первый коэффициент числителя $p_{2n}(v)$ равен единице, а также сумма n слагаемых, каждое из которых равно $1:n$, равна единице. Ввиду равенств (2) и (6) относительно корней многочлена $q_{2n}(v)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} -C_n^1 \frac{0,5-n}{1-2n} &= \beta_1 + \dots + \beta_n; \quad C_n^m (-1)^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} = \\ &= \beta_1 \dots \beta_m + \dots + \beta_{n-m+1} \dots \beta_n; \quad m = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (7)$$

На основании равенств (7) вычислим коэффициенты при v^m для числителя $p_{2n}(v)$, при этом в левой части равенства имеем nC_{n-1}^m слагаемых, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (\beta_2 \dots \beta_{m-1} + \dots + \beta_{n-m+1} \dots \beta_n) + \dots + \frac{1}{n} (\beta_1 \dots \beta_n + \dots + \beta_{n-m} \dots \beta_{n-1}) = \\ = C_{n-1}^m (-1)^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m}; \\ m = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

На основании последнего равенства и равенства (2) теорема доказана. Ввиду равенств (2) и (3) имеем

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{1-v \sin^2 \frac{2m\pi - \pi}{4n}} + r_{2n}(v). \quad (8)$$

2. Эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода ([3], стр. 82) ($z = \sin \varphi$, $h = n$, $\kappa^2 < 1$) после замены множителя $(1-v^{-\frac{1}{2}})$ подынтегральных выражений элементарными дробями (8) и вычисления полученной суммы интегралов равны следующим суммам арктангенсов и остаточных членов:

$$\begin{aligned} F(\varphi, \kappa) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\operatorname{arctg}(\alpha_m \operatorname{tg} \varphi)}{\alpha_m} + \rho_{2n}(v); \\ \kappa^2 &< 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E(\varphi, \kappa) &= 2n\varphi - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{arctg}(\alpha_m \operatorname{tg} \varphi) \times \\ &\times \operatorname{ctg}^2 \frac{2m\pi - \pi}{4n} + R_{2n}(v); \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi, h, \kappa) &= \frac{p_{2n}(-\kappa^2; h)}{q_{2n}(-\kappa^2; h)} \cdot \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+h} \operatorname{tg} \varphi)}{\sqrt{1+h}} + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{(1-\alpha_m)^2 \operatorname{arctg}(\alpha_m \operatorname{tg} \varphi)}{(h+1-\alpha_m^2) \alpha_m} + \sigma_{2n}(v); \quad h < -\kappa^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_m^2 &= 1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{2\pi m - \pi}{4n}, \quad \rho_{2n}(v) = \int_0^z \frac{r_{2n}(v) dz}{V1 - z^2}, \\ R_{2n}(v) &= \int_0^z \frac{(1-v)r_{2n}(v) dz}{V1 - z^2}, \quad \sigma_{2n}(v) = \int_0^z \frac{r_{2n}(v) dz}{(1 + hz^2)V1 - z^2}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Если для эллиптических интегралов заменить множитель $(1-u)^{-\frac{1}{2}}$ подынтегральных выражений элементарными дробями (8), и вычислить полученную сумму интегралов, то эллиптические интегралы представляются в виде следующих сумм логарифмической функции и остаточных членов:

$$\left\{ \begin{aligned} F(\varphi, \kappa) &= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{\beta_m} \ln \frac{1 + \beta_m \sin \varphi}{1 - \beta_m \sin \varphi} + \rho_{2n+1}(u), \\ n &= 1, 2, \dots; \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} E(\varphi, \kappa) &= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \frac{1 - \kappa^2}{\beta_m^3} \cdot \sin^2 \frac{2\pi m - \pi}{n} \cdot \ln \frac{1 + \beta_m \sin \varphi}{1 - \beta_m \sin \varphi} + \\ &+ \frac{p_{2n}(1 - \kappa^{-2})}{q_{2n}(1 - \kappa^{-2})} \sin \varphi + R_{2n+1}(u), \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi(\varphi, h, \kappa) &= \frac{V\bar{h}}{\kappa^2 + h} \cdot \frac{p_{2n}(x_1)}{q_{2n}(x_1)} \operatorname{arctg}(V\bar{h} \sin \varphi) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \frac{\beta_m}{\beta_m^2 + h} \ln \frac{1 + \beta_m \sin \varphi}{1 - \beta_m \sin \varphi} + \sigma_{2n+1}(u), \\ h &\geq 0, \quad x_1 = (\kappa^2 - 1) : (\kappa^2 + h), \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{(1 - \kappa^2) z^2}{1 - \kappa^2 z^2}, \quad \beta_m^2 = \kappa^2 + (1 - \kappa^2) \sin^2 \frac{2\pi m - \pi}{4n}, \\ \rho_{2n+1}(u) &= \int_0^z \frac{r_{2n}(u) dz}{1 - v}, \quad R_{2n+1}(u) = \int_0^z r_{2n}(u) dz, \\ \sigma_{2n+1}(u) &= \int_0^z \frac{r_{2n}(u) dz}{(1 + hz^2)(1 - v)}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

3. Докажем теорему о неравенстве модулей многочленов.

Теорема. Если корни многочлена $Q_{2\kappa+2}(z)$ разделяются корнями многочлена $Q_{2\kappa}(z)$, т. е.

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{2\kappa}(z) &= (z + \beta_1) \dots (z + \beta_\kappa), \\ Q_{2\kappa+2}(z) &= (z + \alpha_1) \dots (z + \alpha_{\kappa+1}), \\ \beta_0 = \alpha_1 &> \beta_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_\kappa > \beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+1} > 0, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

то для модулей этих многочленов имеет место неравенство

$$\left\{ \begin{aligned} |Q_{2\kappa+2}(z)| &\geq |Q_{2\kappa}(z)| |z + \alpha|, \quad \kappa = 1, 2, \dots; \\ \text{где } \operatorname{Re} z &\geq 0, \quad \alpha_1 \dots \alpha_{\kappa+1} = \beta_1 \dots \beta_\kappa \alpha; \quad \alpha_1 > \alpha > \alpha_{\kappa+1}. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\begin{cases} |\sigma_{2n}(v)| < f(v) \delta(z) |1 + h z^2|^{-1}, \\ |\sigma_{2n+1}(u)| < f(u) \Theta(z) |1 + h z^2|^{-1}, \end{cases} \quad -1 < \operatorname{Re}(h z^2) < 0. \quad (24)$$

Для оценок (22) — (24) множители $\delta(z)$ и $\Theta(z)$ следующие

$$\delta(z) = \begin{cases} \arcsin |z| & \text{для } |z| \leq 1, \\ \frac{|z|}{|\sin(\arg z)|} & \text{для } |z| > 1, \end{cases} \quad \operatorname{Re} v < 1; \quad (25)$$

$$\Theta(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{1 + |\kappa z|}{1 - |\kappa z|} & \text{для } |\kappa z| < 1, \\ \frac{|z|}{|\sin(\arg z)|} & \text{для } |\kappa z| > 1, \end{cases} \quad \operatorname{Re} u < 1. \quad (26)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Система аппроксимаций Падэ для степенных функций. Изв. ТПИ, т. 154, стр. 20—23, Томск, 1967.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. Т. И. Стильтес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.